Объединенная межвузовская математическая олимпиада **06.02.2011**

Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставлялась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«$+$» — задача решена полностью;
«$\pm$» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);
«$\mp$» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);
«$-$» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «$+$»или «$\pm$».

Некоторые критерии второй проверки по задачам

Задача 1. Не произведен (или произведен неправильно) отбор корней, в результате чего получен ответ, отличающийся от правильного бесконечной серией — не выше «$\mp$». В целом правильное решение, но упущен один корень — «$\pm$».

Задача 2. Рассмотрены частные случаи, но общее решение отсутствует — «$\mp$».

Задача 3. Получен ответ, но не доказано, что других решений нет — не выше «$\mp$».

Задача 4. Вместо случая «потратил/ждал больше ... часов» рассматривается случай «потратил/ждал *ровно* ... часов» — «$-$».

Задача 6. Используется, но не доказано, что функция f линейна — не выше «$\mp$».

Задача 8. Получен ответ, но не доказано, что других решений нет — не выше «$\mp$».

Задача 9. Построен путь по поверхности фигуры и доказано, что он короче Сашиного — «$+$» («$\pm$», если утверждается, что построенный путь является кратчайшим, но это неверно).

Построен не являющийся кратчайшим путь по поверхности фигуры, про который утверждается, что он длиннее Сашиного — «$-$» (даже если в действительности он короче Сашиного).

Задача 1. Решите уравнение $2|x-1|\sin x = x-1$.

Ответ. 1; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n=1,2,\ldots$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n=0,-1,-2,\ldots$; $\pm(\frac{5\pi}{6}+2\pi n)$, $n=0,1,2,\ldots$.

Задача 2. Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:
• прибавить по баллу за каждый экзамен;
• за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Ответ. Нет.

Решение. Чтобы Ваня набрал более чем по одному экзамену 100 баллов, разница баллов за два этих экзамена должна стать нулевой. Но разница баллов за любые два экзамена либо не меняется, либо меняется на 4. А изначально разница баллов не делится на 4 ни для каких двух результатов экзамена.

Задача 3. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? (Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.)

Ответ. 4, 22, 14.

Решение. Пусть искомые стоимости — x, y и z. Условие дает систему

$$\begin{cases} x+3y+2z=98; \\ 3x+y-5z=-36. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе. Получаем, что $8y+11z=330$. Видно, что y должно делиться на 11. Соответственно, y может быть равно 11, 22 или 33.

Но из первого уравнения системы видно, что, чтобы x было четным, y тоже должно быть четным. Значит, $y=22$, $z=14$, $x=4$.

Задача 4. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое количество деталей. Первый выполнил работу за 8 часов. Второй потратил больше 2 часов на наладку оборудования и с его помощью закончил работу на 3 часа раньше первого. Известно, что второй рабочий через 1 час после начала работы оборудования обработал столько же деталей, сколько к этому времени первый. Во сколько раз оборудование увеличивает производительность труда?

Ответ. В 4 раза.

Решение. Пусть x — время, потраченное на наладку оборудования. Тогда второй рабочий работал (на оборудовании) $8-3-x=5-x$ часов, делая за час столько же, сколько первый за $x+1$ час. Следовательно, $\frac{8}{5-x}=\frac{x+1}{1}$. Получаем, что $x^2-4x+3=0$. Но по условию $x>2$, значит, $x=3$, а искомое отношение равно $\frac{x+1}{1}=4$.

Задача 5. Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 см и 12 см. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении $1:3$, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

Решение. Пусть сторона третьего пятиугольника равна x. Площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. Поэтому площади, заключённые между пятиугольниками, относятся как $(x^2-4^2):(12^2-x^2)=1:3$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Функция f такова, что $f(2x-3y)-f(x+y)=-2x+8y$ для всех x, y. Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(5t)-f(t)}{f(4t)-f(3t)}$.

Ответ. 4.

Решение. Подставляя $y=-x$, получаем, что $f(5x)=-10x+f(0)$, т. е. $f(t)=-2t+c$ (где c — некоторая константа). Значит, искомое выражение всегда (когда оно определено) равняется 4.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 25, 25, 10.

Решение. Пусть в исходном треугольнике ABC $AB=BC$, BM — медиана, O — точка пересечения медиан. Заметим, что OM — диаметр окружности, а значит, $BM=3OM=6r$ (где r — радиус вписанной окружности).

Площадь треугольника, с одной стороны, есть $\frac{1}{2}AC\cdot BM=3r\cdot AC$, а с другой — $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=30r$. Следовательно, $AC=\frac{30r}{3r}=10$, а $AB=BC=\frac{60-10}{2}=25$.

Задача 8. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=13; \\ x^2+y^2+z^2=61; \\ xy+xz=2yz. \end{cases}$$

Ответ. (4;3;6), (4;6;3).

Решение. Обозначим $y+z$ через p, yz через q. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x+p=13; \\ x^2+p^2-2q=61; \\ xp=2q. \end{cases}$$

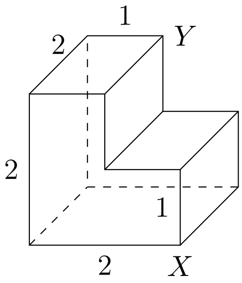
Из последних двух уравнений $(x+p)^2-3xp=61$, а с учетом первого $xp=36$. Решая систему

$$\begin{cases} x+p=13; \\ xp=36, \end{cases}$$

находим, что либо $x=4$, $p=9$, либо $x=9$, $p=4$. Второй случай невозможен, так как система

$$\begin{cases} y+z=4; \\ yz=18; \end{cases}$$

не имеет решений, а первый случай дает приведенный выше ответ.



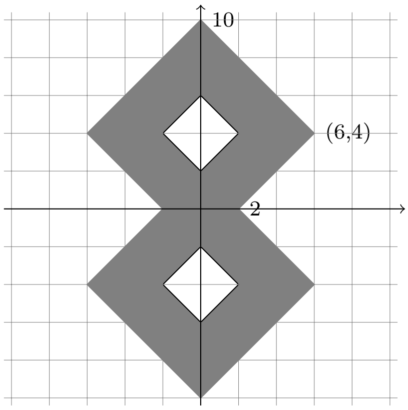
Задача 9. На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим развертку трех правых граней фигуры и соединим X и Y прямой линией. Полученный путь имеет длину $\sqrt{13}$, что меньше 4.

Задача 10. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству: $(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leqslant 4$. Нарисуйте фигуру W и найдите ее площадь.

Ответ. 120.



Страница олимпиады: *http://www.mccme.ru/ommo*

Задача 1. Решите уравнение $2|x+2|\cos x = x+2$.

Ответ. -2; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n=-1,-2,\ldots$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n=0,-1,-2,\ldots$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n=0,1,2,\ldots$.

Задача 2. Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 3 балла меньше, чем по физике, а по физике — на 7 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:
• прибавить по баллу за каждый экзамен;
• за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Ответ. Нет.

Решение. Чтобы Ваня набрал более чем по одному экзамену 100 баллов, разница баллов за два этих экзамена должна стать нулевой. Но разница баллов за любые два экзамена либо не меняется, либо меняется на 4. А изначально разница баллов не делится на 4 ни для каких двух результатов экзамена.

Задача 3. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? (Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.)

Ответ. 4, 22, 14.

Решение. Пусть искомые стоимости — x, y и z. Условие дает систему

$$\begin{cases} x+3y+2z=98;\\ 3x+y-5z=-36. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе. Получаем, что $8y+11z=330$. Видно, что y должно делиться на 11. Соответственно, y может быть равно 11, 22 или 33.

Но из первого уравнения системы видно, что, чтобы x было четным, y тоже должно быть четным. Значит, $y=22$, $z=14$, $x=4$.

Задача 4. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое количество деталей. Первый выполнил работу за 8 часов. Второй потратил больше 2 часов на наладку оборудования и с его помощью закончил работу на 3 часа раньше первого. Известно, что второй рабочий через 1 час после начала работы оборудования обработал столько же деталей, сколько к этому времени первый. Во сколько раз оборудование увеличивает производительность труда?

Ответ. В 4 раза.

Решение. Пусть x — время, потраченное на наладку оборудования. Тогда второй рабочий работал (на оборудовании) $8-3-x=5-x$ часов, делая за час столько же, сколько первый за $x+1$ час. Следовательно, $\frac{8}{5-x}=\frac{x+1}{1}$. Получаем, что $x^2-4x+3=0$. Но по условию $x>2$, значит, $x=3$, а искомое отношение равно $\frac{x+1}{1}=4$.

Задача 5. Три правильных восьмиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух восьмиугольников равны 7 см и 42 см. Третий восьмиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении $1:6$, считая от меньшего восьмиугольника. Найдите сторону третьего восьмиугольника.

Ответ. $7\sqrt{6}$.

Решение. Пусть сторона третьего восьмиугольника равна x. Площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. Поэтому площади, заключённые между восьмиугольниками, относятся как $(x^2-6^2):(42^2-x^2)=1:6$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Функция f такова, что $f(2x-3y)-f(x+y)=-2x+8y$ для всех x, y. Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(4t)-f(t)}{f(3t)-f(2t)}$.

Ответ. 3.

Решение. Подставляя $y=-x$, получаем, что $f(5x)=-10x+f(0)$, т. е. $f(t)=-2t+c$ (где c — некоторая константа). Значит, искомое выражение всегда (когда оно определено) равняется 3.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 25, 25, 10.

Решение. Пусть в исходном треугольнике ABC $AB=BC$, BM — медиана, O — точка пересечения медиан. Заметим, что OM — диаметр окружности, а значит, $BM=3OM=6r$ (где r — радиус вписанной окружности).

Площадь треугольника, с одной стороны, есть $\frac{1}{2}AC\cdot BM=3r\cdot AC$, а с другой — $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=30r$. Следовательно, $AC=\frac{30r}{3r}=10$, а $AB=BC=\frac{60-10}{2}=25$.

Задача 8. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=13;\\ x^2+y^2+z^2=61;\\ xy+xz=2yz. \end{cases}$$

Ответ. (4;3;6), (4;6;3).

Решение. Обозначим $y+z$ через p, yz через q. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x+p=13;\\ x^2+p^2-2q=61;\\ xp=2q. \end{cases}$$

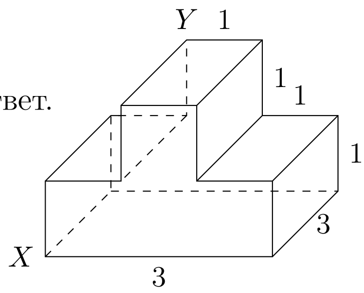
Из последних двух уравнений $(x+p)^2-3xp=61$, а с учетом первого $xp=36$. Решая систему

$$\begin{cases} x+p=13;\\ xp=36, \end{cases}$$

находим, что либо $x=4$, $p=9$, либо $x=9$, $p=4$. Второй случай невозможен, так как система

$$\begin{cases} y+z=4;\\ yz=18; \end{cases}$$

не имеет решений, а первый случай дает приведенный выше ответ.



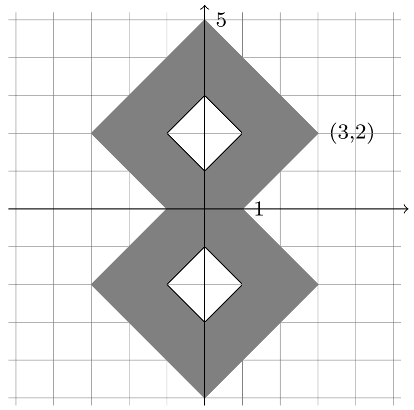
Задача 9. На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4,5. Прав ли он?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим развертку трех левых граней фигуры и соединим X и Y прямой линией. Полученный путь имеет длину $3\sqrt{2}$, что меньше 4,5.

Задача 10. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству $|2 - |x| - ||y| - 2|| \leqslant 1$. Нарисуйте фигуру W и найдите ее площадь.

Ответ. 30.



Страница олимпиады: *http://www.mccme.ru/ommo*

III вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{2}|x+1|\sin x = x+1$.

Ответ. -1; $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=0,1,2,\ldots$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=-1,-2,\ldots$; $\pm(\frac{3\pi}{4}+2\pi n)$, $n=0,1,2,\ldots$.

Задача 2. Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:
• прибавить по баллу за каждый экзамен;
• за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Ответ. Нет.

Решение. Чтобы Ваня набрал более чем по одному экзамену 100 баллов, разница баллов за два этих экзамена должна стать нулевой. Но разница баллов за любые два экзамена либо не меняется, либо меняется на 4. А изначально разница баллов не делится на 4 ни для каких двух результатов экзамена.

Задача 3. Туземец из племени Танга-Танга за 111 стрел в порядке натурального обмена мог получить 2 барабана, 3 жены и одну леопардовую шкуру. Две леопардовые шкуры ценились на 8 стрел меньше, чем 3 барабана и 4 жены. Сколько стрел по отдельности стоили барабан, жена и леопардовая шкура, если за леопардовую шкуру нужно было отдать четное число стрел? (Каждый из этих предметов стоит целое число стрел.)

Ответ. 20, 9, 44.

Решение. Пусть искомые стоимости — x, y и z. Условие дает систему

$$\begin{cases} 2x+3y+z=111; \\ 3x+4y-2z=8. \end{cases}$$

Складывая удвоенное первое уравнение со вторым, получаем, что $7x+10y=230$. Видно, что x должно делиться на 10. Соответственно, x может быть равно 30, 20 или 10.

Но из второго уравнения системы видно, что, чтобы z было четным, x должно делиться на 4. Значит, $x=20$, $y=9$, $z=44$.

Задача 4. Если пассажир поедет из Москвы в Санкт-Петербург обычным поездом, то он доедет туда за 10 часов. Если же он поедет экспрессом, которого придется ждать больше 2,5 часов, то он приедет на 3 часа раньше поезда. Найдите отношение скоростей экспресса и поезда, если известно, что через 2 часа после отхода экспресс окажется на том же расстоянии от Москвы, что и поезд.

Ответ. Экспресс в 2,5 раза быстрее.

Решение. Пусть x — время, потраченное на ожидание экспресса. Тогда экспресс шел $10-3-x=7-x$ часов, проезжая за 2 часа столько же, сколько поезд за $x+2$ часа. Следовательно, $\frac{10}{7-x}=\frac{x+2}{2}$. Получаем, что $x^2-5x+6=0$. Но по условию $x>2{,}5$, значит, $x=3$, а искомое отношение равно $\frac{x+2}{2}=2{,}5$.

Задача 5. Три правильных семиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух семиугольников равны 6 см и 30 см. Третий семиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении $1:5$, считая от меньшего семиугольника. Найдите сторону третьего семиугольника.

Ответ. $6\sqrt{5}$.

Решение. Пусть сторона третьего семиугольника равна x. Площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. Поэтому площади, заключённые между семиугольниками, относятся как $(x^2-6^2):(30^2-x^2)=1:5$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Функция f такова, что $f(x+2y)-f(3x-2y)=2y-x$ для всех x, y. Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(5t)-f(t)}{f(4t)-f(3t)}$.

Ответ. 4.

Решение. Подставляя $x=-2y$, получаем, что $f(0)-f(-8y)=-4y$, т. е. $f(t)=\frac{1}{2}t+c$ (где c — некоторая константа). Значит, искомое выражение всегда (когда оно определено) равняется 4.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 25, 25, 10.

Решение. Пусть в исходном треугольнике ABC $AB=BC$, BM — медиана, O — точка пересечения медиан. Заметим, что OM — диаметр окружности, а значит, $BM=3OM=6r$ (где r — радиус вписанной окружности).

Площадь треугольника, с одной стороны, есть $\frac{1}{2}AC\cdot BM=3r\cdot AC$, а с другой — $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=30r$. Следовательно, $AC=\frac{30r}{3r}=10$, а $AB=BC=\frac{60-10}{2}=25$.

Задача 8. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=15; \\ x^2+y^2+z^2=81; \\ xy+xz=3yz. \end{cases}$$

Ответ. (6;3;6), (6;6;3).

Решение. Обозначим $y+z$ через p, yz через q. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x+p=15; \\ x^2+p^2-2q=81; \\ xp=3q. \end{cases}$$

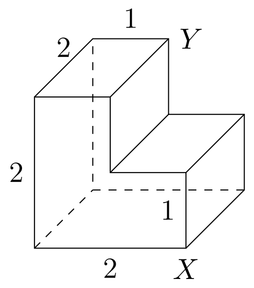
Из последних двух уравнений $(x+p)^2-\frac{8}{3}xp=81$, а с учетом первого $xp=54$. Решая систему

$$\begin{cases} x+p=15; \\ xp=54, \end{cases}$$

находим, что либо $x=6$, $p=9$, либо $x=9$, $p=6$. Второй случай невозможен, так как система

$$\begin{cases} y+z=6; \\ yz=18; \end{cases}$$

не имеет решений, а первый случай дает приведенный выше ответ.



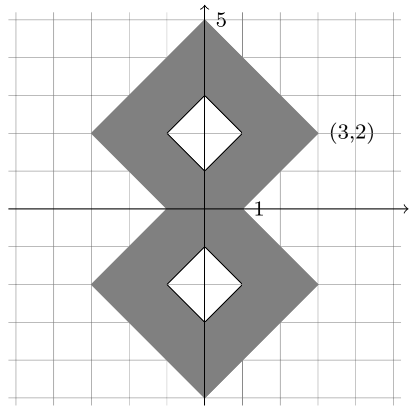
Задача 9. На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим развертку трёх правых граней фигуры и соединим X и Y прямой линией. Полученный путь имеет длину $\sqrt{13}$, что меньше 4.

Задача 10. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству $|2 - |x| - ||y| - 2|| \leqslant 1$. Нарисуйте фигуру W и найдите ее площадь.

Ответ. 30.



Страница олимпиады: *http://www.mccme.ru/ommo*

IV вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{2}|x-2|\cos x = x-2$.

Ответ. 2; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n=-1,-2,\ldots$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n=0,-1,-2,\ldots$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=1,2,\ldots$.

Задача 2. Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 3 балла меньше, чем по физике, а по физике — на 7 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:
- прибавить по баллу за каждый экзамен;
- за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Ответ. Нет.

Решение. Чтобы Ваня набрал более чем по одному экзамену 100 баллов, разница баллов за два этих экзамена должна стать нулевой. Но разница баллов за любые два экзамена либо не меняется, либо меняется на 4. А изначально разница баллов не делится на 4 ни для каких двух результатов экзамена.

Задача 3. Туземец из племени Танга-Танга за 111 стрел в порядке натурального обмена мог получить 2 барабана, 3 жены и одну леопардовую шкуру. Две леопардовые шкуры ценились на 8 стрел меньше, чем 3 барабана и 4 жены. Сколько стрел по отдельности стоили барабан, жена и леопардовая шкура, если за леопардовую шкуру нужно было отдать четное число стрел? (Каждый из этих предметов стоит целое число стрел.)

Ответ. 20, 9, 44.

Решение. Пусть искомые стоимости — x, y и z. Условие дает систему

$$\begin{cases} 2x+3y+z=111; \\ 3x+4y-2z=8. \end{cases}$$

Складывая удвоенное первое уравнение со вторым, получаем, что $7x+10y=230$. Видно, что x должно делиться на 10. Соответственно, x может быть равно 30, 20 или 10.

Но из второго уравнения системы видно, что, чтобы z было четным, x должно делиться на 4. Значит, $x=20$, $y=9$, $z=44$.

Задача 4. Если пассажир поедет из Москвы в Санкт-Петербург обычным поездом, то он доедет туда за 10 часов. Если же он поедет экспрессом, которого придется ждать больше 2,5 часов, то он приедет на 3 часа раньше поезда. Найдите отношение скоростей экспресса и поезда, если известно, что через 2 часа после отхода экспресс окажется на том же расстоянии от Москвы, что и поезд.

Ответ. Экспресс в 2,5 раза быстрее.

Решение. Пусть x — время, потраченное на ожидание экспресса. Тогда экспресс шел $10-3-x=7-x$ часов, проезжая за 2 часа столько же, сколько поезд за $x+2$ часа. Следовательно, $\frac{10}{7-x}=\frac{x+2}{2}$. Получаем, что $x^2-5x+6=0$. Но по условию $x>2{,}5$, значит, $x=3$, а искомое отношение равно $\frac{x+2}{2}=2{,}5$.

Задача 5. Три правильных девятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны девятиугольников равны 8 см и 56 см. Третий девятиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении $1:7$, считая от меньшего девятиугольника. Найдите сторону третьего девятиугольника.

Ответ. $8\sqrt{7}$.

Решение. Пусть сторона третьего девятиугольника равна x. Площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. Поэтому площади, заключённые между девятиугольниками, относятся как $(x^2-8^2):(56^2-x^2)=1:7$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Функция f такова, что $f(x+2y)-f(3x-2y)=2y-x$ для всех x, y. Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(4t)-f(t)}{f(3t)-f(2t)}$.

Ответ. 3.

Решение. Подставляя $x=-2y$, получаем, что $f(0)-f(-8y)=-4y$, т. е. $f(t)=\frac{1}{2}t+c$ (где c — некоторая константа). Значит, искомое выражение всегда (когда оно определено) равняется 3.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 25, 25, 10.

Решение. Пусть в исходном треугольнике ABC $AB=BC$, BM — медиана, O — точка пересечения медиан. Заметим, что OM — диаметр окружности, а значит, $BM=3OM=6r$ (где r — радиус вписанной окружности).

Площадь треугольника, с одной стороны, есть $\frac{1}{2}AC\cdot BM=3r\cdot AC$, а с другой — $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=30r$. Следовательно, $AC=\frac{30r}{3r}=10$, а $AB=BC=\frac{60-10}{2}=25$.

Задача 8. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=15; \\ x^2+y^2+z^2=81; \\ xy+xz=3yz. \end{cases}$$

Ответ. (6;3;6), (6;6;3).

Решение. Обозначим $y+z$ через p, yz через q. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x+p=15; \\ x^2+p^2-2q=81; \\ xp=3q. \end{cases}$$

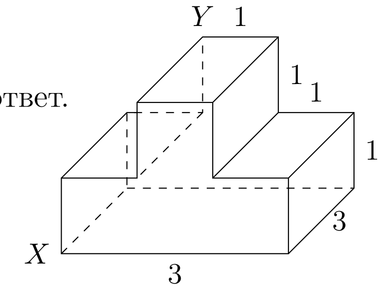
Из последних двух уравнений $(x+p)^2-\frac{8}{3}xp=81$, а с учетом первого $xp=54$. Решая систему

$$\begin{cases} x+p=15; \\ xp=54, \end{cases}$$

находим, что либо $x=6$, $p=9$, либо $x=9$, $p=6$. Второй случай невозможен, так как система

$$\begin{cases} y+z=6; \\ yz=18; \end{cases}$$

не имеет решений, а первый случай дает приведенный выше ответ.



Задача 9. На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4,5. Прав ли он?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим развертку трех левых граней фигуры и соединим X и Y прямой линией. Полученный путь имеет длину $3\sqrt{2}$, что меньше 4,5.

Задача 10. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству: $(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leqslant 4$. Нарисуйте фигуру W и найдите ее площадь.

Ответ. 120.